

STABILITE D'UNE COUCHE POREUSE HORIZONTALE SOUmise A DES CONDITIONS AUX LIMITES PERIODIQUES

J.-P. CALTAGIRONE

Laboratoire d'Aérothermique du C.N.R.S., 4 ter, route des Gardes, 92190-Meudon, France

(Reçu le 1er Novembre 1975)

Résumé—La stabilité d'une couche poreuse horizontale dont la température de la face inférieure est une fonction périodique du temps a été étudiée théoriquement par la méthode de Galerkin. Les résultats se présentent sous la forme d'une corrélation entre le nombre de Rayleigh, la fréquence réduite du signal à la paroi et l'amplitude de celui-ci. Plusieurs types d'évolutions des instabilités au sein de la couche poreuse sont observés et on peut définir deux nombres de Rayleigh critiques correspondant aux états marginaux séparant les états stables inconditionnellement, stables globalement et instables.

NOTATIONS

a ,	fonction du temps;
b ,	fonction du temps;
c ,	chaleur massique;
e ,	vecteur unitaire;
f ,	fréquence réduite;
g ,	accélération de la pesanteur;
i ,	imaginaire pure;
k ,	pulsation adimensionnelle;
s ,	nombre d'onde $(s_x^2 + s_y^2)^{1/2}$;
t ,	temps;
u, v ,	nombres complexes;
v ,	perturbation de vitesse $u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + w \mathbf{e}_3$;
A, B, C, D, E, G ,	intégrales définies;
D ,	d/dz ;
H ,	hauteur de la couche poreuse;
K ,	perméabilité du milieu poreux;
N ,	degré de l'approximation;
T ,	température;
V ,	vecteur vitesse;
W ,	perturbation de vitesse adimensionnelle.

τ ,	période des perturbations $2\pi/\omega$;
φ ,	déphasage;
ψ ,	fonction de courant;
ω ,	pulsation;
ΔT ,	écart de température;
Θ ,	perturbation de température adimensionnelle;
ϖ ,	perturbation de pression.

Indices, exposants

c ,	critique;
ct ,	critique de transition;
f ,	fluide;
i ,	inférieur;
m ,	moyenne;
0 ,	état initial;
s ,	solide, supérieur;
$1, 2, 3$,	coordonnées orthogonales (x, y, z) ;
$*$,	caractérise une grandeur définie en milieu poreux;
i ,	dérivée partielle par rapport à l'indice muet;
$'$,	caractérise une grandeur adimensionnelle.

Nombres sans dimensions

F ,	caractérise le degré de division du milieu K/H^2 ;
M ,	rapport des chaleurs volumiques du fluide et du milieu poreux saturé $(\rho c)_f/(\rho c)^*$;
Nu^* ,	nombre de Nusselt;
Pr^* ,	nombre de Prandtl $(\rho c)_f \nu/\lambda^*$;
Ra^* ,	nombre de Rayleigh $g\alpha(\rho c)_f \Delta T K H / (\nu \lambda^*)$.

Lettres Grecques

α ,	module du nombre complexe u ;
α ,	coefficient d'expansion thermique du fluide;
β ,	coefficient d'amplification;
ϵ ,	porosité du substrat (rapport du volume de vide sur volume total);
θ ,	perturbation de température;
λ ,	conductivité thermique;
μ ,	viscosité dynamique;
ν ,	viscosité cinématique;
ρ ,	masse volumique;

1. INTRODUCTION

LE PROBLÈME de la couche poreuse homogène et isotrope, limitée par des surfaces horizontales, isothermes et imperméables, soumise à un gradient thermique moyen uniforme colinéaire au vecteur accélération et de même sens, a fait l'objet de nombreuses publications parmi lesquelles nous citerons celles de Horton et Rogers [1], Lapwood [2], Schneider [3], Katto et Masuoka [4]. Dans l'ensemble, ces travaux définissent et confirment expérimentalement le critère d'apparition de la convection naturelle au sein d'une couche poreuse, soit $Ra^* = 4\pi^2$. Au-delà de cette valeur, la convection s'organise en rouleaux ou en cellules hexagonales stables suivant les dimensions transversales de la couche poreuse (Combarous et Bories [5]). Un autre mode de convection a été mis en évidence lorsque le nombre de Rayleigh est supérieur à Ra^*_{cf} (250 à 390): la convection fluctuante (Combarous et Le Fur [6], Caltagirone *et al.* [7], Caltagirone [8]).

Lorsque l'on soumet une telle couche poreuse à des conditions aux limites instationnaires, les conditions critiques d'apparition des phénomènes convectifs au sein de la couche ne sont plus déterminées par l'analyse linéaire classique et il est nécessaire de définir de nouveaux critères de stabilité [9]. Pour un signal thermique instationnaire sur l'une des parois de la couche plane, des instabilités peuvent prendre naissance à certains instants dans le milieu poreux sous forme de bouffées thermoconvectives alors qu'à d'autres moments le phénomène redevient stable. Ces différentes évolutions au cours du temps dépendent des caractéristiques géométriques et thermiques de la couche poreuse ainsi que du type de signal aux surfaces.

Par raison de simplification, le cas traité ici est celui de la couche poreuse horizontale limitée par des surfaces imperméables, la surface inférieure étant soumise à une évolution de température périodique sinusoïdale et la surface supérieure maintenue à température constante. Toutefois, cet exemple est susceptible de généralisation, par exemple à des conditions aux limites périodiques diverses.

2. FORMULATION DU PROBLEME

Considérons une couche poreuse horizontale de hauteur H et de dimensions transversales indéfinies suivant les directions x et y . La surface supérieure est maintenue à température uniforme et constante T_s , prise pour origine de l'échelle des températures, la température de la surface inférieure T_i est uniforme et périodique, de période τ . Le substrat solide a une porosité ε et une perméabilité K . Le fluide interstitiel saturant est caractérisé par son coefficient d'expansion thermique α , sa chaleur volumique $(\rho c)_f$ et sa viscosité cinématique ν . Le milieu poreux constitué par la matrice solide et le fluide interstitiel est assimilé à un milieu isotrope et homogène de chaleur volumique $(\rho c)^* = (\rho c)_f \varepsilon + (\rho c)_s (1 - \varepsilon)$ et de conductivité thermique λ^* constante. L'approximation de Boussinesq est adoptée: les variations de la masse volumique sont négligées sauf dans le terme générateur de la convection.

Les équations relatives à la convection naturelle en milieu poreux s'écrivent:

$$V_{j,j} = 0, \quad (1)$$

$$(\rho c)^* \hat{c}_t T = \lambda^* T_{,jj} - (\rho c)_f V_j T_{,j}, \quad (2)$$

$$\varepsilon^{-1} \rho \hat{c}_t V_i = -p_{,i} + \rho g_i - \frac{\rho \nu}{K} V_i \quad (3)$$

où $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_3$ est l'accélération de la pesanteur; $\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3$ la vitesse de filtration et p la pression; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sont les vecteurs unitaires portés respectivement par les axes x, y et z . L'équation d'état s'écrit quant à elle: $\rho = \rho_1 (1 - \alpha(T - T_1))$. Les longueurs sont rapportées à H , le temps à la quantité $(\rho c)^* H^2 / \lambda^*$, la vitesse à $\lambda^* / H (\rho c)_f$, la pression à $\lambda^* \mu / K (\rho c)_f$ et la température à la différence de température moyenne ΔT entre les deux surfaces:

$$\Delta T = (T_{im} - T_s) \quad \text{avec} \quad T_{im} = 1/\tau \int_0^\tau T_i dt \quad \text{et} \quad T_s = 0.$$

La température périodique imposée à la surface inférieure du modèle est du type $T_i = 1 + \beta \sin \omega t$ où β et ω sont respectivement l'amplitude et la pulsation de la modulation de la température de paroi.

3. STABILITE

3.1 Etude du régime préconvectif

Nous supposons le régime périodique de convection établi et nous laisserons de côté le régime purement transitoire; dans ces conditions la distribution de température au sein de la couche doit satisfaire à l'équation de Fourier:

$$\hat{c}_t T_0 = T_{0,33}. \quad (4)$$

Cherchons des solutions de la forme:

$$T_0 = (1 - z) + \beta w(z, t) \quad (5)$$

où $w(z, t)$ doit satisfaire aussi à l'équation de Fourier; la solution obtenue par la méthode classique de séparation des variables est de la forme:

$$w(z, t) = u(z)v(t) \quad (6)$$

avec:

$$u(z) = u_r + iu_i = \alpha e^{i\varphi} = \frac{\text{sh}[k(1+i)(1-z)]}{\text{sh}[k(1+i)]} \quad (7)$$

et

$$v(t) = e^{i\omega t} \quad (8)$$

où

$$k = (\omega/2)^{1/2}, \quad \alpha = |u|, \quad \varphi = \text{Arg } u.$$

Les Figs. 1 et 2 représentent respectivement l'amplitude et le déphasage en fonction de la profondeur z , pour plusieurs valeurs de la fréquence f . Le champ de température dans la couche poreuse correspondant au régime périodique établi s'écrit ainsi:

$$T_0 = (1 - z) + \beta \alpha \sin(\omega t + \varphi). \quad (9)$$

Lorsque la variation de la température de surface est périodique, quelconque, l'utilisation du principe de superposition permet d'écrire T_0 sous la forme suivante:

$$T_0 = (1 - z) + \beta \sum_{m=1}^{\infty} A_m \alpha_m \sin(m\omega t + \varphi_m). \quad (10)$$

L'état de référence, sur lequel des perturbations de température et de vitesse seront introduites, est caractérisé par un champ de vitesse uniformément nul $\mathbf{V}_0 = 0$ et une distribution de température T_0 donnée par l'expression (9).

3.2 Analyse des conditions de stabilité

Afin d'étudier la stabilité d'une couche poreuse et plus précisément le développement des perturbations à partir de l'état de référence T_0 défini plus haut, considérons des perturbations adimensionnelles de température θ' , de vitesse \mathbf{v}' , de pression π' et de masse volumique $-\alpha \Delta T \theta'$:

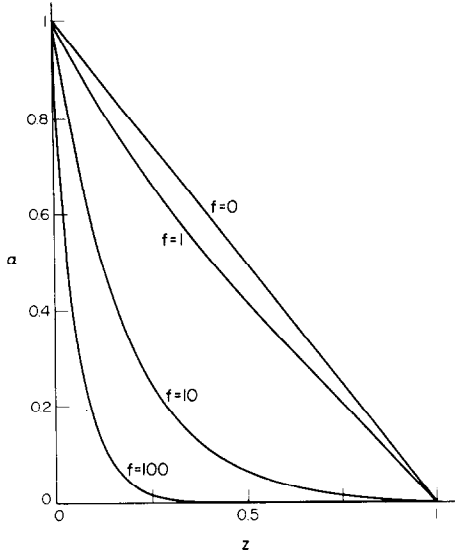


FIG. 1. Amplitude des oscillations de température α en fonction de la profondeur pour 4 valeurs de la fréquence f .

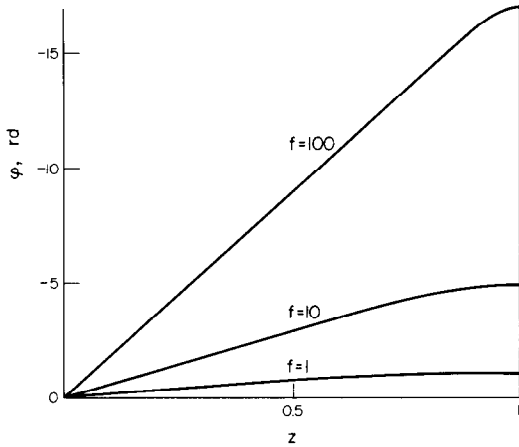


FIG. 2. Déphasage des oscillations de température φ en fonction de la profondeur pour 3 valeurs de la fréquence f .

$$\begin{aligned} \theta' &= T' - T'_0 \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{V}' - \mathbf{V}'_0 \\ \pi' &= p' - p'_0 \\ -\alpha \Delta T \theta' &= (\rho - \rho_0) / \rho_1 \end{aligned} \quad (11)$$

avec: $\mathbf{v}' = u' \mathbf{e}_1 + v' \mathbf{e}_2 + w' \mathbf{e}_3$.

Dans l'état de référence défini par l'indice zéro, le champ de vitesse est nul $\mathbf{V}'_0 = 0$.

Introduisons les perturbations (11) dans le système (1-3); l'équation de l'énergie s'écrit en négligeant les termes du second ordre:

$$\partial_t T'_0 + \partial_t \theta' = T'_{0,jj} + \theta'_{,jj} - v'_j T'_{0,j}, \quad (12)$$

L'état de référence correspond à un régime de conduction pure:

$$\partial_t T'_0 = T'_{0,jj} \quad (13)$$

d'où:

$$\partial_t \theta' = \theta'_{,jj} - v'_j T'_{0,j}. \quad (14)$$

En prenant deux fois le rotationnel des deux membres de l'équation de la quantité de mouvement (3) on obtient:

$$\varepsilon^{-1} F Pr^* M^{-1} \partial_i v'_{i,jj} = Ra^* k_i - v'_{i,jj} \quad (15)$$

où $Ra^* = g\alpha(\rho c)_f \Delta T K H / \nu \lambda^*$ est le nombre de Rayleigh, $Pr^* = (\rho c)_f \nu / \lambda^*$ un nombre de Prandtl, $F = K/H^2$ un nombre caractéristique du degré de division du milieu poreux, $M = (\rho c)_f / (\rho c)^*$ le rapport des chaleurs volumiques de fluide et du milieu poreux saturé, $\mathbf{k} = -\theta'_{,13} \mathbf{e}_1 - \theta'_{,23} \mathbf{e}_2 + (\theta'_{,11} + \theta'_{,22}) \mathbf{e}_3$. Considérons l'équation de l'énergie (14) en remarquant que $T'_{0,1} = T'_{0,2} = 0$ et en tenant compte de $v'_{j,j} = 0$, et la composante sur \mathbf{e}_3 de l'équation (15):

$$\partial_t \theta' = \theta'_{,jj} - T'_{0,3} w' \quad (16)$$

$$\varepsilon^{-1} F Pr^* M^{-1} \partial_t w'_{,jj} = Ra^* (\theta'_{,11} + \theta'_{,22}) - w'_{,jj}, \quad (17)$$

La couche poreuse étant comprise entre deux plans horizontaux indéfinis, développons les perturbations en fonction d'ondes périodiques à deux dimensions [10, 11]:

$$\theta' = \theta(z, t) \exp[i(s_x x + s_y y)] \quad (18)$$

$$w' = w(z, t) \exp[i(s_x x + s_y y)] \quad (19)$$

avec s_x et s_y deux nombres d'onde caractéristiques de la perturbation.

Les plans horizontaux étant supposés imperméables et isothermes, ces perturbations de température et de vitesse doivent satisfaire aux conditions aux limites suivantes:

$$\theta = w = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad \text{et } z = 1. \quad (20)$$

En introduisant (18) et (19) dans (16) et (17) il vient:

$$\partial_t \theta = (D^2 - s^2) \theta - T'_{0,3} w \quad (21)$$

$$\varepsilon^{-1} F Pr^* M^{-1} \partial_t (D^2 - s^2) w = -Ra^* s^2 \theta - (D^2 - s^2) w \quad (22)$$

avec $D = d/dz$ et $s = (s_x^2 + s_y^2)^{1/2}$ nombre d'onde.

Pour résoudre ce système, employons la méthode de Galerkin [12, 13]; celle-ci consiste à représenter les perturbations θ et w par un ensemble de fonctions linéairement indépendantes, satisfaisant aux conditions aux limites:

$$\theta = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Theta_i(z) \quad (23)$$

$$w = \sum_{i=1}^N b_i(t) W_i(z). \quad (24)$$

En remplaçant dans (21) et (22):

$$da_i/dt \Theta_i = a_i (D^2 - s^2) \Theta_i - b_i T'_{0,3} W_i, \quad (25)$$

$$\varepsilon^{-1} F Pr^* M^{-1} db_i/dt (D^2 - s^2) W_i = -a_i Ra^* s^2 \Theta_i - b_i (D^2 - s^2) W_i. \quad (26)$$

En multipliant ces deux équations respectivement par Θ_j et W_j et en intégrant sur la hauteur de la couche, nous obtenons le système différentiel suivant:

$$A_{ij} da_i/dt = B_{ij} a_i + C_{ij} b_i, \tag{27}$$

$$\varepsilon^{-1} F P r^* M^{-1} D_{ij} db_i/dt = G_{ij} R a^* a_i + E_{ij} b_i, \tag{28}$$

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, G_{ij}, E_{ij}$ sont des intégrales définies portant sur les fonctions Θ et W et ont donc des valeurs constantes; C_{ij} est un terme contenant $T'_{0,3}$ et dépend du temps. Le système à $2N$ équations (27-28) peut être mis sous la forme:

$$dC/dt = A^{-1}BC = LC, \quad t \geq 0 \tag{29}$$

où A, B, L sont des matrices carrées et C le vecteur colonne des a_i et des b_i .

La résolution du système différentiel (29) est effectuée numériquement par la méthode de Runge-Kutta. La solution est représentée par les évolutions des termes $a_i(t)$ et $b_i(t)$ au cours d'une période $\tau = 2\pi/\omega = 1/f$; une valeur initiale arbitraire, égale à 1, est donnée à a_i et b_i .

Les fonctions d'essais, satisfaisant aux conditions aux limites, choisies dans ce cas sont $\Theta_i = W_i = [(1-z)\varepsilon]^i$. Ce sont des fonctions très simples; le critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse soumise à un gradient adverse constant [8] est $Ra_c^* = 40,0$ pour $N = 1$, $Ra_c^* = 39,47899$ pour $N = 2$ et $Ra_c^* = 39,47841$ pour $N = 3$ soit une erreur relative inférieure à 10^{-8} , ce qui donne une idée de la convergence de la méthode. Comme nous recherchons à déterminer l'influence de la fréquence des oscillations de température à la paroi et de leurs amplitudes, une approximation de degré un ($N = 1$) nous semble suffisante. Un certain nombre de calculs numériques effectués par la méthode de Runge-Kutta à partir du système (27-28) avec des valeurs différentes du nombre sans dimensions $F = K/H^2$, montrent l'influence négligeable de celui-ci lorsque sa valeur est inférieure à 10^{-3} . Les valeurs de F habituellement rencontrées sont beaucoup plus petites (10^{-6} - 10^{-8}). Compte-tenu de ce résultat, donnons à F la valeur zéro et examinons l'effet de cette approximation sur le système (27-28) avec $N = 1$.

On a ainsi:

$$b = -aRa^*G/E \tag{30}$$

et

$$a = \exp[1/AE \int (BE - Ra^*GC(r)) dt]. \tag{31}$$

En explicitant $T'_{0,3}$ donc C , la solution du système (27-28) pour $N = 1$ s'écrit finalement:

$$a = e^{\lambda z} e^{\mu(\tau,t)} \tag{32}$$

avec:

$$\lambda = (BE - Ra^*GH)/AE; \quad H = - \int_0^1 W_1 \Theta_1 dz; \tag{33}$$

$$\mu = -Ra^*G \left(\frac{P(z)}{\omega} \cos \omega t + \frac{R(z)}{\omega} \sin \omega t \right) / AE;$$

où

$$P = -\beta \int_0^1 W_1 \Theta_1 (\alpha_{,3} \sin \varphi + \alpha_{\varphi,3} \cos \varphi) dz;$$

$$R = \beta \int_0^1 W_1 \Theta_1 (\alpha_{\varphi,3} \sin \varphi - \alpha_{,3} \cos \varphi) dz.$$

On peut noter que lorsque l'amplitude β des oscillations de température de surface est nulle, il faut que λ soit négatif pour que la perturbation tende vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

4. INTERPRETATION PHYSIQUE DES RESULTATS

Lorsqu'un système physique est régi par un système différentiel linéaire à coefficients constants de la forme $dX/dt = AX$, trois types d'évolutions différentes peuvent, d'après la théorie de la stabilité de Liapunov [14], caractériser ce système qui peut être ainsi stable, asymptotiquement stable (annulation de l'instabilité au bout d'un temps suffisamment long) ou instable.

Pour que le système soit asymptotiquement stable, il faut et il suffit que les valeurs propres de la matrice A aient une partie réelle négative. Le polynôme caractéristique s'écrit alors:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (I \text{ opérateur identité}). \tag{34}$$

Dans notre cas, nous recherchons les conditions critiques d'apparition de la convection à partir d'un état de référence défini plus haut, dans un phénomène gouverné par un système linéaire défini à coefficients périodiques de la forme: $dC/dt = L(t)C$. Dès lors, pour une fréquence et une amplitude des oscillations de température de surface données, trois questions peuvent se poser: Au-delà de quelle valeur du nombre de Rayleigh la convection se développe-t-elle et se maintient-elle au sein de la couche de manière permanente? Entre quelles valeurs du nombre de Rayleigh la convection apparaît-elle et disparaît-elle au cours d'une période? Au-dessous de quel nombre de Rayleigh, le système est-il inconditionnellement stable?

Pour tenter de répondre à ces questions, résolvons le système (27-28) avec, dans un premier temps, plusieurs

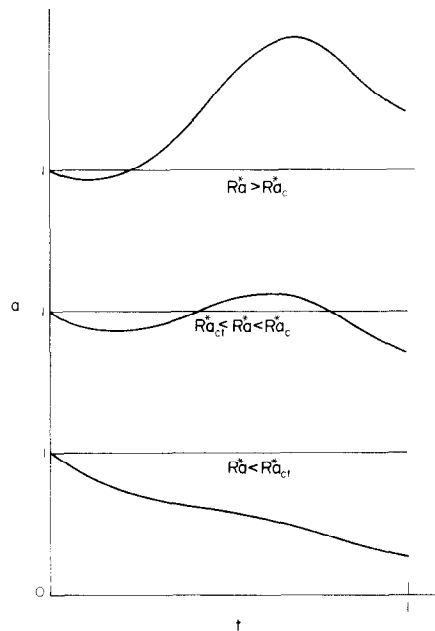


FIG. 3. Différents types d'évolution de la perturbation au cours du temps suivant la valeur du nombre de Rayleigh Ra^* ($F = 0$).

Tableau 1. Valeurs de C_{cr} , Ra_{cr}^* et $t_c \cdot f$ pour quelques valeurs de la fréquence et de l'amplitude des oscillations de température à la paroi

β	f	C_{cr}	Ra_{cr}^*	$t_c \cdot f$
0,2	1	0,039917	33,4019	0,27
	10	0,036988	36,0469	0,39
	100	0,033870	39,3653	0,47
1	0,1	0,066658	20,0026	0,25
	1	0,066255	20,1242	0,27
	10	0,051610	25,8345	0,40
	100	0,036020	37,0160	0,47
	1000	0,033627	39,6506	0,49
5	1	0,197944	6,7359	0,27
	10	0,124719	10,6906	0,39
	100	0,046768	28,5091	0,47
	1000	0,034801	38,3120	0,49

valeurs de $F = K/H^2$ et ensuite avec l'approximation $F = 0$; les résultats sont d'ailleurs très peu différents. Lorsque f et β sont fixés, trois évolutions de la perturbation sont obtenues au cours d'une période; celles-ci sont schématisées sur la Fig. 3.

Pour Ra^* supérieur à $Ra_{cr}^* = 40$, la perturbation a s'amplifie globalement et l'amplitude de la perturbation à la fin d'une période est supérieure à un.

Si le nombre de Rayleigh est compris entre $Ra_{cr}^* = 40$ et Ra_{cr}^* , la perturbation est globalement décroissante, mais sur une partie de la courbe, $a(t)$ présente une pente positive; pendant cet intervalle de temps la perturbation s'amplifie pour ensuite régresser.

Enfin, si Ra^* est inférieur à Ra_{cr}^* la courbe $a(t)$ est strictement décroissante sur toute la période et aucun phénomène convectif ne peut se développer dans la couche poreuse.

L'état marginal entre les états de conduction transitoire et convection périodique est caractérisé par le nombre de Rayleigh critique de transition Ra_{cr}^* défini par la condition $da/dt = 0$. Le nombre d'onde critique correspondant au minimum de Ra_{cr}^* est égal à $\sqrt{10}$.

Le tableau 1 donne C_{cr} , valeur de C correspondant à $da/dt = 0$, Ra_{cr}^* , valeur du nombre de Rayleigh critique de transition et $t_c \cdot f$ représentant l'abscisse du point $da/dt = 0$ sur la Fig. 3, ceci pour plusieurs valeurs de la

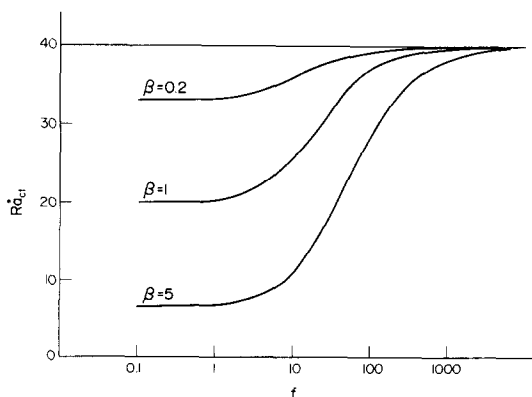


FIG. 4. Variations du nombre de Rayleigh critique de transition Ra_{cr}^* en fonction de la fréquence f pour trois valeurs de l'amplitude β des oscillations de température à la paroi ($F = 0$).

fréquence réduite f et de l'amplitude β . La Fig. 4 représente les variations de Ra_{cr}^* en fonction de f pour trois valeurs de β ($F = 0$).

Pour des fréquences imposées supérieures à 1000, le nombre de Rayleigh critique Ra_{cr}^* tend vers $Ra_{cr}^* = 40$; seule une épaisseur très faible de la couche poreuse est affectée par les oscillations de température de surface. Lorsque f est inférieure à 1, le système est pratiquement toujours en équilibre, le gradient est quasiment constant sur toute la hauteur de la couche et $Ra_{cr}^* \rightarrow Ra_{cr}^*/(\beta + 1)$.

Ces deux résultats auxquels on pouvait s'attendre et qui s'accordent qualitativement avec ceux de Venezian [15] relatifs à une couche fluide soumise aux mêmes types de conditions aux limites, permettent de valider en partie l'étude théorique.

5. CONCLUSIONS

Cette étude de stabilité d'une couche poreuse horizontale soumise à des conditions aux limites périodiques nous conduit à formuler deux constatations: les méthodes habituelles d'étude de la stabilité de systèmes physiques régis par un système d'équations différentielles à coefficients constants ne s'appliquent plus lorsque les conditions aux limites sont du type périodique. D'autre part, l'état de référence à partir duquel est testée la stabilité n'est plus un état d'équilibre du système et nous sommes donc conduits à distinguer ici un état d'équilibre d'un état stable. Le nombre de Rayleigh critique de transition Ra_{cr}^* définissant l'état marginal entre la conduction et la convection, correspondant à la condition $da/dt = 0$, est une limite inférieure; c'est en fait une condition nécessaire.

Si les résultats correspondant aux très petites ou aux très grandes fréquences f , étaient prévisibles, en particulier, les valeurs de Ra_{cr}^* , les limites de l'intervalle de fréquence où les variations de Ra_{cr}^* ne sont pas négligeables n'étaient par contre pas évidentes a priori; d'après la Fig. 4 représentant les valeurs du nombre de Rayleigh critique de transition en fonction de la fréquence, c'est dans l'intervalle 1, 1000 que doivent se placer, au moins approximativement, les fréquences pour lesquelles l'effet des conditions aux limites périodiques est sensible.

Remerciements—Que Monsieur le Professeur J. J. Bernard trouve ici le témoignage de ma reconnaissance pour les encouragements et l'aide effective qu'il m'a apportés.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. W. Horton et F. T. Rogers, Convection currents in a porous medium, *J. Appl. Phys.* **16**, 367-370 (1945).
2. E. R. Lapwood, Convection of a fluid in a porous medium, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **44**, 508 (1948).
3. K. J. Schneider, Investigation of the influence of free thermal convection on heat transfer through granular material, XIth International Congress of Refrigeration, paper 11-4, Munich (1963).
4. Y. Katto et T. Masuoka, Criterion for onset of convective flow in a fluid in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 297-309 (1967).
5. M. A. Combarrous et S. A. Bories, *Advances in Hydroscience*, Vol. 10, pp. 231-307. Academic Press, New York (1975).

6. M. A. Combarous et B. Le Fur, Transfert de chaleur par convection naturelle dans une couche poreuse horizontale, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **269B**, 1009–12 (1969).
7. J.-P. Caltagirone, M. Cloupeau et M. Combarous, Convection naturelle fluctuante dans une couche poreuse horizontale, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **273B**, 833–836 (1971).
8. J.-P. Caltagirone, Thermoconvective instabilities in a horizontal porous layer, *J. Fluid Mech.* **72**, 269–288 (1975).
9. J.-P. Caltagirone, Stabilité d'une couche poreuse horizontale soumise à des conditions aux limites périodiques, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **281B**, 133–136 (1975).
10. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press, Oxford (1961).
11. P. Glansdorff et I. Prigogine, *Structure, Stabilité et Fluctuations*, Masson et Cie, Paris (1971).
12. L. V. Kantorovich et V. I. Krylov, *Approximate Methods in Higher Analysis*, edited by P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands (1958).
13. B. A. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York (1972).
14. J. Lasalle et S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method*, Academic Press, New York (1961).
15. G. Venezian, Effect of modulation on the onset of thermal convection, *J. Fluid Mech.* **35**(2), 243–254 (1969).

STABILITY OF A HORIZONTAL POROUS LAYER UNDER PERIODICAL BOUNDARY CONDITIONS

Abstract—The stability of a horizontal porous layer, the temperature of which at the inner side is a periodical function of time, has been theoretically studied by the Galerkin technique. The results show a correlation between the Rayleigh number, the reduced frequency of the signal on the wall and its amplitude. Different types of evolution of the instabilities within the porous layer are observed and two critical Rayleigh numbers can be defined, which correspond to the boundary states separating the unconditionally steady states, the globally steady states and the unsteady states.

STABILITÄT EINER PORÖSEN HORIZONTALSCHICHT UNTER PERIODISCHEN RANDBEDINGUNGEN

Zusammenfassung—Die Stabilität einer porösen Horizontalschicht, deren Temperatur auf der Bodenfläche eine periodische Zeitfunktion ist, wurde mittels der Galerkin-Methode theoretisch untersucht. Die Ergebnisse zeigen eine Korrelation zwischen der Rayleigh-Zahl, der reduzierten Frequenz des Signals auf der Fläche und seiner Amplitude.

Es werden verschiedene Entwicklungstypen der Unstabilitäten innerhalb der porösen Schicht beobachtet und zwei kritische Rayleigh-Zahlen bestimmt, entsprechend den Grenz-zuständen, die die unbedingt stabilen Zustände, die im Ganzen stabilen Zustände und die instabilen Zustände abgrenzen.

УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПОРИСТОГО СЛОЯ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ НА ГРАНИЦАХ

Аннотация — Устойчивость горизонтального пористого слоя, температура нижнего слоя которого является периодической функцией времени, была теоретически изучена методом Галеркина. Результаты показывают зависимость между числом Рэлея, приведённой частотой сигнала на стенке и амплитудой сигнала. Было отмечено несколько типов эволюции неустойчивостей внутри пористого слоя и установлено два критических числа Рэлея, соответствующих граничным состояниям, разделяющим абсолютно устойчивое, глобально устойчивое и неустойчивое состояния.